Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Troisième séance d'exercices –

`connexions et tenseur de Riemann`

Les corrections sont intercalées entre les énoncés et entourées d'un cadre similaire à celui-ci. Nous omettons de reproduire les corrections de certains exercices complémentaires (ou de certaines parties d'exercices) marqués d'une étoile (*). Si discuter de la résolution de l'un de ces problèmes vous intéresse, venez directement me trouver !

Exercice 1 : crochet de Lie. Soient $u, v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ deux champs de vecteurs sur une variété $\mathcal{M}$. On définit le *crochet de Lie* $[u, v]$ de u et v par son action sur une fonction quelconque $f \in C^\infty(\mathcal{M})$:

$$[u,v](f) \triangleq u(v(f)) - v(u(f)).$$

a. Montrer que, dans une carte locale et dans la base des dérivées partielles $\{\partial_\alpha\}$, les composantes de $[u, v]$ sont

$$[u,v]^\alpha \triangleq u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - u^\alpha{}_{,\beta}\, v^\beta.$$

b. Vérifier explicitement que ce sont bien les composantes d'un champ de vecteurs.

Correction.

a. En nous plaçant dans la base des $\{\partial_\alpha\}$, l'action du crochet de Lie sur une fonction f peut s'écrire en termes de ses composantes $[u, v]^\alpha$ comme

$$[u,v](f) = [u,v]^\alpha \partial_\alpha f.$$

D'autre part, en utilisant la définition donnée dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}[u,v](f) &= u^\alpha \partial_\alpha\left(v^\beta \partial_\beta f\right) - v^\alpha \partial_\alpha\left(u^\beta \partial_\beta f\right) \\ &= \left(u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta}\right)\partial_\alpha f.\end{aligned}$$

On identifie donc les composantes du crochet de Lie de u et v comme étant

$$[u,v]^\alpha = u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - v^\beta u^\alpha{}_{,\beta}.$$

b. Sous un changement de coordonnées $x \to x'(x)$, les composantes du crochet de

Lie se transforment comme

$$
\begin{aligned}
[u,v]^\alpha \to\ & u^{\beta'} v^{\alpha'}{}_{,\beta'} - u^{\alpha'}{}_{,\beta'} v^{\beta'} \\
&= \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} u^\beta \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} v^\alpha \right) - \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} u^\alpha \right) \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} v^\beta \\
&= u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} v^\alpha \right) - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} u^\alpha \right) v^\beta \\
&= \left(u^\beta v^\alpha{}_{,\beta} - u^\alpha{}_{,\beta} v^\beta \right) \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} + \cancel{u^\beta \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} v^\alpha} - \cancel{u^\alpha \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} v^\beta} \\
&= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} [u,v]^\alpha .
\end{aligned}
$$

Cette expression est bien la loi de transformation des composantes d'un vecteur !

Exercice 2 : transport parallèle dans $\mathbb{R}^2$. Soit l'espace Euclidien à 2 dimensions, sur lequel on définit le transport parallèle au sens usuel de la géométrie élémentaire. On considère le plan en coordonnées polaires : $\mathrm{d}s^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$. À partir de la définition du transport parallèle

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) \triangleq V^\mu(x) - V^\lambda(x) \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \Delta x^\nu ,$$

déterminer les coefficients de connexion dans ces coordonnées (indice : considérer séparément des déplacements selon r et selon ϕ). Comparer les résultats au calcul direct des symboles de Christoffel.

On en conclut que le transport parallèle ainsi défini est compatible avec la métrique et correspond à une connexion sans torsion.

Correction.
Soit v un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Dans la base $\{\partial_r, \partial_\phi\}$, on peut écrire ce vecteur en termes de ses composantes v^r et v^ϕ comme

$$v = v^r \partial_r + v^\phi \partial_\phi .$$

La norme de v est donnée par

$$v^2 = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = (v^r)^2 + r^2 (v^\phi)^2 ,$$

puisque les composantes de la métrique en coordonnées polaires sont

$$g_{rr} = 1, \qquad g_{\phi\phi} = r^2, \qquad g_{r\phi} = g_{\phi r} = 0.$$

Soit maintenant θ l'angle entre la direction du vecteur ∂_r et celle du vecteur v. Les composantes v^r et v^ϕ du vecteur v défini au point P de coordonnées (r, ϕ) sont

$$v^r = v \cos\theta, \qquad v^\phi = \frac{v}{r} \sin\theta .$$

Le facteur $1/r$ dans l'expression de v^ϕ provient du fait que le vecteur de base ∂_ϕ n'est pas normé, puisque $\|\partial_\phi\|^2 = g_{\phi\phi} = r^2$.
Naïvement, transporter parallèlement un vecteur revient à déplacer ses deux extrémités de la même façon. En particulier, cette opération préserve la sa norme. On considère successivement des déplacements infinitésimaux selon les deux directions ∂_r et ∂_ϕ (voir Figure 1) :

- ◇ Déplacement selon ∂_r ($\Delta r \neq 0$, $\Delta\phi = 0$) : notons $\tilde{v}$ le transport parallèle du vecteur v depuis le point $P = (r, \phi)$ jusqu'au point $Q = (r + \Delta r, \phi)$. Ses composantes sont

$$\tilde{v}^r(r + \Delta r, \phi) = v\cos\theta = v^r,$$
$$\tilde{v}^\phi(r + \Delta r, \phi) = \frac{v}{r + \Delta r}\sin\theta = \frac{v/r}{1 + \Delta r/r}\sin\theta \approx \frac{v}{r}\sin\theta\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) = v^\phi\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right).$$

  En comparant ces résultats avec la définition formelle du transport parallèle,

$$\tilde{v}^r(r + \Delta r, \phi) = v^r(r, \phi) - v^r(r, \phi)\Gamma^r_{rr}\Delta r - v^\phi(r, \phi)\Gamma^r_{r\phi}\Delta r,$$
$$\tilde{v}^\phi(r + \Delta r, \phi) = v^\phi(r, \phi) - v^r(r, \phi)\Gamma^\phi_{rr}\Delta r - v^\phi(r, \phi)\Gamma^\phi_{r\phi}\Delta r,$$

  on peut inférer les valeurs de quatre des coefficients de connexion :

$$\Gamma^r_{rr} = \Gamma^r_{r\phi} = \Gamma^\phi_{rr} = 0, \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}.$$

- ◇ Déplacement selon ∂_ϕ ($\Delta r = 0$, $\Delta\phi \neq 0$) : notons θ' l'angle entre ∂_r et $\tilde{v}$, le transporté parallèle de v au point $R = (r, \phi + \Delta\phi)$. Ses composantes sont

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^r(r, \phi + \Delta\phi) &= v\cos\theta' \\
&= v\cos(\theta - \Delta\phi) \\
&= v(\cos\theta\cos\Delta\phi + \sin\theta\sin\Delta\phi) \\
&\approx v\cos\theta + v\sin\theta\Delta\phi \\
&= v^r + rv^\phi\Delta\phi.
\end{aligned}$$

  En comparant cette expression avec la définition

$$\tilde{v}^r(r, \phi + \Delta\phi) = v^r(r, \phi) - v^r(r, \phi)\Gamma^r_{\phi r}\Delta\phi - v^\phi(r, \phi)\Gamma^r_{\phi\phi}\Delta\phi,$$

  on trouve

$$\Gamma^r_{\phi r} = 0, \qquad \Gamma^r_{\phi\phi} = -r.$$

  Finalement, la relation

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^\phi(r, \phi + \Delta\phi) &= \frac{v}{r}\sin(\theta - \Delta\phi) \\
&= \frac{v}{r}(\sin\theta\cos\Delta\phi - \cos\theta\sin\Delta\phi) \\
&\approx \frac{v}{r}\sin\theta - \frac{v}{r}\cos\theta\Delta\phi \\
&= v^\phi(r, \phi) - \frac{1}{r}v^r(r, \phi)\Delta\phi
\end{aligned}$$

  nous permet d'obtenir

$$\Gamma^\phi_{\phi\phi} = 0, \qquad \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}.$$

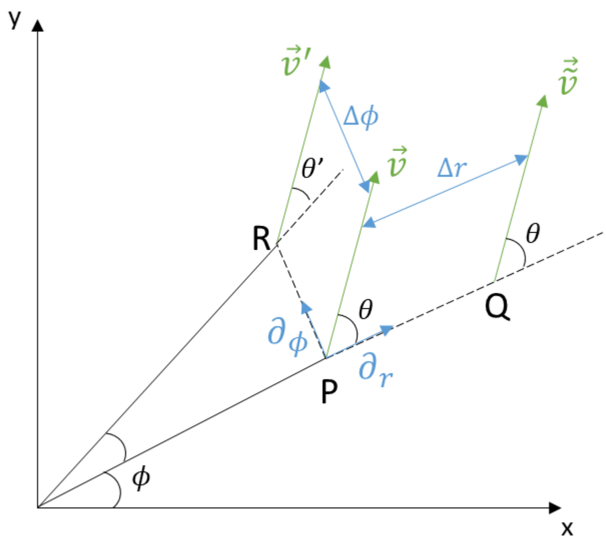

FIGURE 1 – Transport parallèle du vecteur $\vec{v}$ selon deux directions indépendantes ∂_r et ∂_ϕ

Ces coefficients de connexion sont identiques aux symboles de Christoffel, comme un calcul direct le montre. A titre d'exemple, nous allons calculer un des symboles de Christoffel à partir de leur définition. Remarquons tout d'abord que les composantes de la métrique inverse sont données par

$$g^{rr} = 1, \qquad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2}, \qquad g^{r\phi} = g^{\phi r} = 0.$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(\partial_\phi g_{r\phi} + \partial_\phi g_{r\phi} - \partial_r g_{\phi\phi} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\phi\phi} \\
&= -\frac{1}{2} \partial_r r^2 \\
&= -r.
\end{aligned}$$

On procède identiquement pour le calcul des cinq autres symboles indépendants. Le transport parallèle « naïf » utilisé dans cet exercice est donc compatible avec la métrique et correspond à une connexion sans torsion.

Exercice 3 : identités de Ricci. On considère une variété $\mathcal{M}$ munie d'une connexion sans torsion.

a. Soit $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ un champ de vecteurs. Montrer que l'on a la relation suivante :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^\rho = R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} v^\lambda.$$

b. Montrer que, pour tout champ de covecteurs $\omega \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M})$, on a la relation

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\omega_\rho = -R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}\omega_\lambda.$$

c. Généraliser ces relations à un champ de tenseurs de rang $(1,1)$:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^\alpha{}_\beta = R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}T^\lambda{}_\beta - R^\lambda{}_{\beta\mu\nu}T^\alpha{}_\lambda,$$

puis à un champ de tenseurs de rang (m,n) quelconque.

Correction.

a. Développons le membre de gauche de l'identité :

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] v^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu v^\rho - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \partial_\mu(\nabla_\nu v^\rho) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\nabla_\alpha v^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\alpha}\nabla_\nu v^\alpha - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= \partial_\mu\left(\nabla_\nu v^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\lambda}v^\lambda\right) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\left(\partial_\alpha v^\rho + \Gamma^\rho_{\alpha\lambda}v^\lambda\right) \\
&\quad + \Gamma^\rho_{\mu\alpha}\left(\partial_\nu v^\alpha + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}v^\lambda\right) - (\mu \leftrightarrow \nu).
\end{aligned}$$

Le second terme de cette expression s'annule, puisqu'on considère une connexion sans torsion, qui satisfait à $\Gamma^\alpha_{[\beta\gamma]} = 0$. Développons les termes restants :

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] v^\rho = \partial_\mu\partial_\nu v^\rho + \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\lambda}v^\lambda + \cancel{\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\partial_\mu v^\lambda} + \cancel{\Gamma^\rho_{\mu\alpha}\partial_\nu v^\alpha} + \Gamma^\rho_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}v^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu).$$

Le premier terme de cette expression s'annule puisque les dérivées partielles commutent, tandis que les deux termes biffés s'annulent entre-eux lorsqu'il sont antisymétrisés en $\mu\nu$. En utilisant l'expression explicite des composantes du tenseur de Riemann, nous avons finalement

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] v^\rho &= \left(\partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} - (\mu \leftrightarrow \nu)\right)v^\lambda \\
&= R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\lambda v^\lambda \\
&= R^\rho{}_{\lambda\mu\nu}v^\lambda.
\end{aligned}$$

REMARQUE IMPORTANTE : dans ce développement, l'ordre dans lequel on calcule les deux dérivées covariantes revêt de l'importance. En effet, $\partial_\alpha v^\beta$ n'est *pas* un tenseur, et nous n'avons pas de prescription pour calculer $\nabla_\mu\left(\partial_\alpha v^\beta\right)$ en notre possession.

b. Le calcul est très similaire à celui du point précédent.

c. Plutôt que d'effectuer un calcul direct, on peut utiliser les deux résultats précédents : considérons

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] A_\alpha T^\alpha{}_\beta \overset{3.b.}{=} -R^\lambda{}_{\beta\mu\nu}A_\alpha T^\alpha{}_\lambda.$$

Le membre de gauche de cette expression se réécrit

$$\begin{aligned}
\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] A_\alpha T^\alpha{}_\beta &= T^\alpha{}_\beta\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] A_\alpha + A_\alpha\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] T^\alpha{}_\beta \\
&\overset{3.b.}{=} -R^\lambda{}_{\alpha\mu\nu}A_\lambda T^\alpha{}_\beta + A_\alpha\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] T^\alpha{}_\beta.
\end{aligned}$$

Au final, nous obtenons

$$A_\alpha \left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] T^\alpha{}_\beta = A_\alpha \Big(R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} T^\lambda{}_\beta - R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} T^\alpha{}_\lambda \Big).$$

Cette relation devant être valable quel que soit le covecteur A_α, on trouve bien l'identité annoncée.

On se convainc que l'identité de Ricci générale pour un tenseur de rang (m, n) prend la forme

$$\begin{aligned}\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n} = {} & R^{\alpha_1}{}_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\alpha_2\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_n} + \ldots + R^{\alpha_m}{}_{\lambda\mu\nu} T^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\lambda}{}_{\beta_1\ldots\beta_n} \\ & - R^\lambda{}_{\beta_1\mu\nu} T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\lambda\beta_2\ldots\beta_n} - \ldots - R^\lambda{}_{\beta_n\mu\nu} T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}{}_{\beta_1\ldots\beta_{n-1}\lambda}.\end{aligned}$$

Exercice 4 : tenseur de Riemann. Le tenseur de Riemann est défini formellement comme l'application

$$\begin{aligned} R : {} & \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \\ : {} & (X, Y, Z) \mapsto R(Z, X, Y) \triangleq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \end{aligned}$$

avec ∇ la connexion de Levi-Civita. Montrer que, dans une carte locale, on a

$$R(Z, X, Y) = R^\alpha{}_{\nu\mu\beta} X^\mu Y^\beta Z^\nu \partial_\alpha.$$

Ceci montre que R est bien un champ de tenseurs, et pas simplement un opérateur différentiel comme la définition aurait pu le laisser croire.

Correction. Nous souhaitons calculer

$$R(Z, X, Y) = [\nabla_X \nabla_Y Z - (X \leftrightarrow Y)] - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

On évalue chaque terme en suivant la même stratégie que dans l'exercice précédent. Après quelques gouttes de sueur, nous trouvons

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z = \Big[& X^\mu \partial_\mu Y^\nu \partial_\nu Z^\alpha + X^\mu Y^\nu \partial_\mu \partial_\nu Z^\alpha + \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\rho} X^\mu Y^\nu Z^\rho + \Gamma^\alpha_{\nu\rho} X^\mu \partial_\mu Y^\nu Z^\rho \\ & + \Gamma^\alpha_{\nu\rho} X^\mu Y^\nu \partial_\mu Z^\rho + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} X^\mu Y^\rho \partial_\rho Z^\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{\rho\gamma} X^\mu Y^\rho Z^\gamma \Big] \partial_\alpha\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}-\nabla_{[X,Y]} Z &= -[X, Y]^\alpha \Big(\partial_\mu Z^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} Z^\nu \Big) \partial_\alpha \\ &= \Big(- X^\mu \partial_\mu Y^\nu \partial_\nu Z^\alpha + Y^\mu \partial_\mu X^\nu \partial_\nu Z^\alpha - \Gamma^\alpha_{\nu\rho} X^\mu \partial_\mu Y^\nu Z^\rho + \Gamma^\alpha_{\nu\rho} Y^\mu \partial_\mu X^\nu Z^\rho \Big) \partial_\alpha.\end{aligned}$$

Lorsqu'on rassemble tous les termes, il nous reste

$$\begin{aligned}R(Z, X, Y) &= X^\mu Y^\nu Z^\rho \Big(\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu) \Big) \partial_\alpha \\ &= X^\mu Y^\nu Z^\rho R^\alpha{}_{\rho\mu\nu} \partial_\alpha.\end{aligned}$$

On en conclut que $R(Z, X, Y)$ est bien un tenseur puisque (i) il s'agit clairement d'une application multilinéaire en ses arguments et (ii) qu'elle ne fait intervenir que les composantes de X, Y et Z en un point, et pas leurs dérivées, comme on aurait pu s'y attendre au vu de sa définition.